85 - La guerre du Sinus verse et de l'Haversine

Encore en fin de XX^e^ siècle, avant l'introduction des tables HO249 (ou AP3270), les calculs de la navigation astronomique, de même que ceux de la loxodromie se faisaient sur la base de formules mathématiques.
Ces dernières se résolvaient par des additions, soustractions et multiplications ou divisions, utilisant des tables de trigonométrie et aussi les logarithmes. Mais tout pouvait se résoudre en quelques lignes, au verso d'un ticket de métro, objet tout aussi disparu aujourd'hui que l'usage quotidien du sextant.
Dans les années 1960, les examens pour l'obtention d'un brevet d'Officier de Marine exigeaient encore l'utilisation des tables de logarithmes, bien que les fameuses tables HO étaient déjà largement répendues, tant en navigation aérienne qu'en mer.

Ces tables utilisaient une donnée trigonométrique spécifique, l'Haversine chez les Anglais, ou sinus verse chez les Français. Comme son nom le laisse penser, la préfixe « Ha » vient de « half » ou « halbe », soit la moitié ou le demi. Versine, mot anglais, a été traduit dans la langue de Molière par « sinus verse ». Les tables trigonométriques de haversines remontent au début du XIX^e^ siècle, avec une publication de James Andrew en 1805, bien que le terme « Haversine » n'ait été proposé qu'en 1835 par le mathématicien britannique James Inman.
Cependant, il est à relever que le mathématicien et astronome José de Mendoza y Rios utilise le versinus dans un traité sur les sciences et techniques de navigation, publié en 1787 déjà, œuvre de référence de ce XVIII^e^ siècle, le Siècle des Lumières.

C'est donc bien l'Espagnol José de Mendoza y Rios qui est l'inventeur de cette approche, même si les anglosaxons ont largement développé cette méthode de calcul au siècle suivant et ont un peu tendance à se l'attribuer.

A cette époque la latitude d'un navire se faisait par la méthode de la méridienne et par l'intermédiaire de deux hauteurs du Soleil et le temps qui les séparent, alors que la longitude se calculait par les distances lunaires (voir mes articles sur ces sujets).

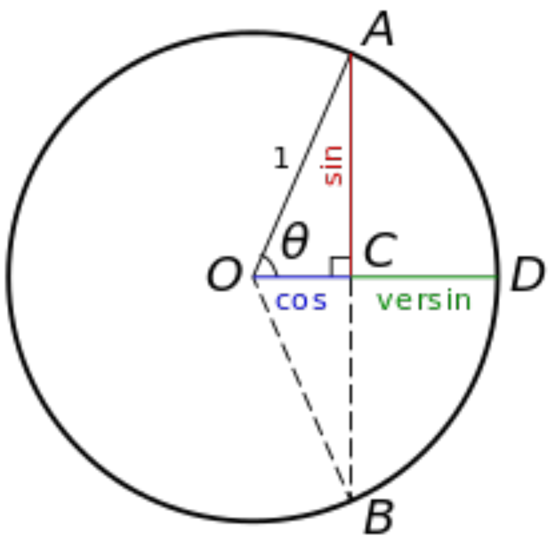
L'haversine est une fonction toujours positive, ce qui facilite le calcul par logarithmes.
On a ainsi :

Versine $\theta = 1 - \cos\theta = 2\sin^2(\theta / 2)$

et

Haversine $\theta = \sin^2(\theta / 2$

Wikipédia nous apprend que, historiquement, le sinus verse est une fonction introduite par les mathématiciens indiens dans le Surya Siddhanta et dans l'Aryabhajiya au VI^e^ siècle déjà. La fonction est dérivée de la notion de flèche. Tout comme le sinus indien (*jya*) c'est une longueur associée à un arc d'un cercle de rayon donné. Appelée *utkrama-jya*, elle correspond dans un cercle à la flèche de l'arc double, tout comme *jya* correspond à la demi-corde de l'arc double, c'est-à-dire Rsin(θ).



Dans la figure ci-dessus, (source: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Versine.svg?uselang=fr), le sinus verse de l'angle θ correspond à la longueur du segment CD, soit aussi la flèche de l'arc AB.

La fonction haversine est dérivée du sinus verse et l'énorme avantage de cette fonction trigonométrique réside, comme déjà dit, en ce qu'elle a toujours une valeur positive et permet l'utilisation des logarithmes pour toutes les valeurs d'angles.

Un peu de trigonométrie pour les matheux :

Les formules permettent non seulement de résoudre les problèmes d'astronomie, mais également de déterminer la distance sur un arc de grand cercle entre deux points d'une sphère, à partir de leurs longitudes et latitude respectives.
La formule de Haversine est utilisée dans la navigation, mais c'est un cas particulier d'une formule plus générale de la trigonométrie sphérique qui associe les côtés et les angles des triangles sphériques.
Le théorème du cosinus nous dit que, dans un triangle sphérique, le cosinus d'un côté est fonction des deux autres côtés ainsi que de l'angle opposé, selon la formule de base :

Cos a = cos b * (cos c + sin c) * cos A

Pour le domaine de la navigation astronomique on retiendra les formules suivantes :

Sin Hc = (sin L * sin D) + (cos L * cos D * cos LHA)

et

Cotg Zn = (sin L * cotg LHA) – (tg D * cos L / sin LHA)

Avec LHA = angle horaire local, D = Déclinaison et L = Latitude
ainsi que Hc = Hauteur calculée et Zn = Azimuth nominal.
LHA peut avoir une valeur comprise entre 000° et 360°, avec comme corolaire un problème de signes (+ ou -).

Deux écoles pour les calculs :

Les tables françaises de Dieumegard utilisent les versinus et la formule devient :

versine (90° - Hc) = versine (L ± D) + cos L * cos D * versine (LHA)
C'est la Formule dite de Dieumegard

Ou, en revenant aux fonctions classiques :

sin Hc = cos(L ± D) + cos L * cos D * (cos LHA)

Les tables de Dieumegard et Bataille étaient le système officiel de calcul de la Marine Nationale Française, éditées par le SHOM sous le nom de "Tables 900".

Ces tables présentent l'avantage d'être de relativement petite taille, moins de 40 pages. Ce sont de fait des tables de logarithmes utilisant le système des versines, adaptées à la navigation astronomique

Comme indiqué ci-dessus, les tables de Dieumegard sont utilisées pour le calcul de la hauteur calculée en utilisant une formule mathématique différente de la formule habituelle. Elles se présentent sous la forme de 29 tableaux de chiffres, divisés en 4 groupes :

- La table 1 donne un premier chiffre (A) à partir de l'angle horaire local LHA.
- La table 2 donne un second chiffre (B), à partir de la latitude de l'observateur,

ainsi qu'un troisième chiffre (C), basé sur la déclinaison de l'astre.
On aditionne les trois données A + B +C.

- La table 3 donne un quatrième chiffre (D) à partir de la somme susmentionnée.
- La table A donne un cinquième chiffre (E) basé sur notre latitude et de la déclinaison de l'astre (L±D selon les signes).

Toujours dans la table A, on obtient la Hauteur calculée (Hc) à partir de la somme des valeurs D + E.

On relève que ces tables de Dieumegard présentent un même schéma mathématique que la méthode anglo-saxonne qui suit, à savoir l'addition de 3 valeurs A+B+C, la conversion de ce total en une valeur naturelle, puis l'addition de la valeur trigonométrique L±D, ce qui nous donne le résultat final Hc (ou Zd).

La formule des Haversines, utilisée dans les méthodes classiques anglosaxonnes, se présente quant à elle comme suit :

Hav Hc = hav LHA * cos L * cos D + hav (L±D)
C'est la Formule dite de Saint Hilaire

Dans les deux cas, la valeur de (L±D) dépend des signes de L et de D. Quand ils sont de même signe, on prend la différence entre L et D. Lorsque L et D sont de signe opposé, on prend la somme de L et de D.

Comment se pratiquait le calcul à cette époque avec les logarithmes ?
Une fois l'indication du sextant corrigée comme il se doit, on avait la hauteur vraie de l'astre (Hv) en degrés, minutes et pour les pinailleurs, fractions de minute, l'œil humain ayant une précision de l'ordre de la demi-minute.

Prenons un exemple avec les données suivantes :
LHA = 66° 49'
Latitude = 31° 10' N
Déclinaison de l'astre = 19° 25' N
Et calculons la distance zénithale ou la hauteur calculée, son complément.

LHA 66° 49'	Log Hav. =	9.48168	
L 31° 10' N	Log Cos =	9.93230	
D 19° 25' N	Log cos =	9.97457	
	Log Hav.	9.38855	
	Hav. Naturel	0.24465	
L-D 11° 45'	Hav. Naturel	0.01048	(L-D car les deux sont N)
Dist. Zénithale	Hav. Naturel	0.25513	ce qui correspond à 60° 40.5',

D'où le complément à 90°, soit une **hauteur calculée de 29° 19.5'**

Le tout peut parfaitement s'écrire au dos d'un ticket de métro, CQFD !

Sources :

- P.-A. Reymond, Evolution de la navigation astronomique au cours des siècles, éditions Alderaban, 2012
- Wikipédia
- De Mendoza y Rios, Memoria sobre algunos métodos nuevos de calcular la longitud por las distancias lunares, 1795, Bibliothèque de Barcelone, réf 52-fol-C 1/13
- Nories Nautical Tables, Imray, London, 1961

Extrait du livre de Mendoza y Rios mentionné dans ce texte.

Dadas la latitud geográfica, y la declinacion y el ángulo horario de un astro, hallar su altura.

Por la Trigonometría esférica se tiene (fig. 2):

$$\cos. ZS = \cos. ZPS \text{ sen. } ZP \text{ sen. } PS + \cos. ZP \cos. PS$$

Esto es, $\text{sen. } H = \cos. A \cos. L \cos. D + \text{sen. } L \text{ sen. } D$

$$= \cos. A \cos. L \cos. D - \cos. L \cos. D + \cos. L \cos. D + \text{sen. } L \text{ sen. } D$$

$$= -\cos. L \cos. D\,(1 - \cos. A) + \cos.(L \sim D) = \cos.(L \sim D) - \cos. L \cos. D \text{ sen. verso } A$$

$$= \cos.(L \sim D)\left(1 - \frac{\cos. L \cos. D \text{ sen. verso } A}{\cos.(L \sim D)}\right)$$

Tal es la fórmula para quando la declinacion y la latitud son de una misma especie. Pero si fueren de diferente especie, será:

$$\text{sen. } H = \cos. A \cos. L \cos. D - \cos. L \cos. D + \cos. L \cos. D - \text{sen. } L \text{ sen. } D$$

$$= -\cos. L \cos. D\,(1 - \cos. A) + \cos.(L + D) = \cos.(L + D) - \cos. L \cos. D \text{ sen. verso } A$$

$$= \cos.(L + D)\left(1 - \frac{\cos. L \cos. D \text{ sen. verso } A}{\cos.(L + D)}\right)$$

Y generalmente:

$$\text{sen. } H = \cos.(L \overset{\sim}{+} D)\left(1 - \frac{\cos. L \cos. D \text{ sen. verso } A}{\cos.(L \overset{\sim}{+} D)}\right)$$

Tomando pues $\frac{\cos. L \cos. D \text{ sen. verso } A}{\cos.(L \overset{\sim}{+} D)} = \text{sen. verso } M$

Resultará $\text{sen. } H = \cos.(L \overset{\sim}{+} D) \cos. M$.

El signo $\sim$ quando la declinacion y la latitud son de la misma especie, el signo $+$ quando son de diferente especie.